Annales
corrigées et commentées

Concours
2021 / 2022 / 2023

PC PC*

Maths et informatique

3e édition

- Concours commun Mines-Ponts
- Centrale-Supélec
- CCINP
- e3a

ellipses

Éric Billault
Abdellah Bechata

Sujet n° 1

Mines 2021 – Mathématiques I

L'énoncé

A2021 – MATH I PC

Concours commun
Mines-Ponts

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2021

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion

Dans tout le sujet, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « variable aléatoire » pour parler d'une variable aléatoire réelle discrète, et « variable aléatoire entière » pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{Z}$. On pourra noter

$$X(\Omega) = \{x_n,\, n \in I\}$$

où I est un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbf{N}$ et $x_n \in \mathbf{R}$ pour tout $n \in I$.

Définition 1 (Dispersion d'ordre α) *On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire. On dit que X **vérifie la condition** $(\mathcal{D}_\alpha)$ - dite de dispersion d'ordre α - lorsque, quand n tend vers $+\infty$,*

$$\mathbf{P}(|X| \geqslant n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{1}$$

Définition 2 (Variables aléatoires symétriques) *On dit que X est **symétrique** lorsque $-X$ suit la même loi que X, autrement dit lorsque*

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(X = -x). \tag{2}$$

On admet le *principe de transfert de l'égalité en loi :*

Théorème 1 Étant donné deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans un même ensemble E, ainsi qu'une application $u : E \to F$, si X et Y suivent la même loi alors $u(X)$ et $u(Y)$ aussi.

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires entières, mutuellement indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. On *admet* que sous ces conditions la variable X_{n+1} est indépendante de $X_1 + \ldots + X_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

appelée n-ième moyenne empirique des variables X_k. L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables M_n.

Les trois premières parties su sujet sont totalement indépendantes les unes des autres.

Questions de cours

1 ▷ Soit X une variable aléatoire. Rappeler la définition de « X est d'espérance finie ». Montrer alors que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.

2 ▷ Soit X une variable aléatoire. Montrer que si X est bornée, autrement dit s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $P(|X| \leqslant M) = 1$, alors X est d'espérance finie.

Généralités sur les variables aléatoires

3 ▹ Soit X une variable aléatoire entière vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$. Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.

4 ▹ Soit X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $\mathbf{E}(f(X)) = 0$.

5 ▹ Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de (X, Y), démontrer que $X + Y$ est symétrique.

Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leqslant 1$. On introduit la fonction

$$L : t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1 - uz} \mathrm{d}u.$$

6 ▹ Montrer que, sur le segment $[0, 1]$, la fonction L est convenablement définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner une expression simple de sa dérivée n-ième pour tout $n \geqslant 1$.

7 ▹ Justifier que pour tout $t \in]0, 1]$, on a $1 - t \leqslant |1 - tz|$, et plus précisément encore que $1 - t < |1 - tz|$.

8 ▹ En déduire successivement que

$$\int_0^1 \left| \frac{1 - t}{1 - tz} \right|^n \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1 - t)^n}{(1 - tz)^{n+1}} \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

9 ▹ En déduire, grâce à une formule de Taylor, que $L(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

10 ▹ Montrer que la fonction

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ (t, u) & \mapsto & |1 + u\,\mathrm{e}^{it}| \end{array} \right.$$

est continue. En déduire qu'il existe, pour tout $a \in]0, \pi[$, un réel $m_a > 0$ tel que

$$\forall (t, u) \in [-a, a] \times [0, 1], \quad |1 + u\,\mathrm{e}^{it}| \geqslant m_a.$$

11 ▹ Montrer que la fonction

$$F : t \in] - \pi, \pi[\mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{it}}{1 + u\,\mathrm{e}^{it}} \mathrm{d}u$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

12 ▹ Montrer que

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad F'(t) = -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2},$$

et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in]-\pi, \pi[$.

13 ▹ Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique X. On pose

$$\Phi_X : \begin{cases} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & \mathbf{E}\Big(\cos(tX)\Big), \end{cases}$$

appelée fonction caractéristique de X.

14 ▹ Montrer que Φ_X est bien définie, paire et que $\forall t \in \mathbf{R}$, $|\Phi_X(t)| \leqslant 1$.

15 ▹ En utilisant le théorème du transfert, montrer que Φ_X est continue.

Dans la suite de cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$R_n := \mathbf{P}(|X| \geqslant n).$$

16 ▹ On fixe un réel $t \in]0, 2\pi[$. Montrer successivement que

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$$

puis

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \left[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right].$$

On pourra établir au préalable la convergence la convergence de la série $\sum_n R_n \cos(nt)$

17 ▹ Montrer qu'il existe un nombre réel C tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) \mathrm{e}^{int} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} C,$$

et en déduire que, quand t tend vers 0^+,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln t) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\alpha}{2} + o(1).$$

18 ▹ Conclure que, quand t tend vers 0^+,

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\alpha}{2} t + o(t).$$

La fonction Φ_X est-elle dérivable en 0 ?

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19 ▹ Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

20 ▹ Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable M_n est symétrique et

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t/n)\right)^n.$$

21 ▹ En déduire que pour tout réel t,

$$\Phi_{M_n}(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right).$$

22 ▹ La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur $\mathbf{R}$?

À partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $\frac{\pi\alpha}{2}$, ce qui signifie que pour tout segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$,

$$\mathbf{P}(a \leqslant M_n \leqslant b) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{2} \int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + (\pi\alpha/2)^2}.$$

FIN DU PROBLÈME

Le corrigé commenté

Variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion

Questions de cours

1 ▷ La variable aléatoire X admet une espérance finie si la série de terme général $x_n\mathbf{P}(X = x_n)$ converge absolument autrement dit si la série

$$\sum_{n\in I} |x_n|\mathbf{P}(X = x_n)$$

converge puisque les $\mathbf{P}(X = x_n)$ sont positifs.

Commentaires

La convergence absolue assure que la série $\sum_{n\in I} x_n\mathbf{P}(X = x_n)$ converge commutativement c'est-à-dire que la convergence et la somme de la série ne dépendent pas de l'ordre dans lequel on somme les termes de la série . Plus techniquement, si on note σ une bijection de I vers I, la série $\sum_{n\in I} x_{\sigma(n)}\mathbf{P}(X = x_{\sigma(n)})$ converge et

$$\sum_{n\in I} x_{\sigma(n)}\mathbf{P}(X = x_{\sigma(n)}) = \sum_{n\in I} x_n\mathbf{P}(X = x_n)$$

D'après le théorème de transfert, la variable $|X|$ admet une espérance finie si et seulement si la série

$$\sum_{n\in I} |x_n|\mathbf{P}(X = x_n)$$

converge. Cela revient à dire que la variable X admet une espérance finie.

Commentaires

Le théorème de transfert s'énonce ainsi. Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire discrète. Soit f une application de $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in I\}$ dans $\mathbf{R}$. Alors la variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\in I} f(x_n)\mathbf{P}(X = x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on a

$$\mathbf{E}\big(f(X)\big) = \sum_{n\in I} f(x_n)\mathbf{P}(X = x_n)$$

2 ▹ On note

$$J = \{n \in I \mid |x_n| \leqslant M\}$$

- Pour $n \in I \setminus J$, on a :

$$(X = x_n) \subset \bigcup_{k \in I \setminus J} (X = x_k) = (X > M) = \Omega \setminus (X \leqslant M)$$

donc $\mathbf{P}(X = x_n) = 0$.

- Pour $n \in J$, on a $|x_n| \leqslant M$.

On a donc

$$\forall n \in I, \quad |x_n|\mathbf{P}(X = x_n) \leqslant M\mathbf{P}(X = x_n)$$

La série de terme général $M\mathbf{P}(X = x_n)$ converge (elle est de somme égale à M). Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $|x_n|\mathbf{P}(X = x_n)$ converge. Donc X admet une espérance finie.

Commentaires

Une variable aléatoire X est dite essentiellement bornée s'il existe un réel M strictement positif tel que $\mathbf{P}(|X| \leqslant M) = 1$. Dans ce cas, on pose

$$\|X\|_\infty := \inf\{M > 0 \mid \mathbf{P}(|X| \leqslant M) = 1\}$$

$\|\cdot\|_\infty$ n'est pas une norme mais une semi-norme. L'axiome de séparation n'est pas vérifié.

Généralités sur les variables aléatoires

3 ▹ Soit X une variable aléatoire entière vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$. On a donc $X(\Omega) \subset \mathbf{Z}$. Supposons par l'absurde que X admette une espérance finie. La série de terme général $|n|\mathbf{P}(X = n)$ converge. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|\mathbf{P}(X = n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \big(n\mathbf{P}(X = n) + n\mathbf{P}(X = -n)\big) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n\big(\mathbf{P}(X = n) + \mathbf{P}(X = -n)\big) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{P}(|X| = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(|X| \geqslant n)
\end{aligned}$$

d'après un théorème du cours sur les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$. D'après l'hypothèse sur X, on a

$$\mathbf{P}(|X| \geqslant n) \overset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}$$